

Der Quermaßkörper des regulären Tetraeders

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 48, 1997,
S.75-86



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Der Quermaßkörper des regulären Tetraeders

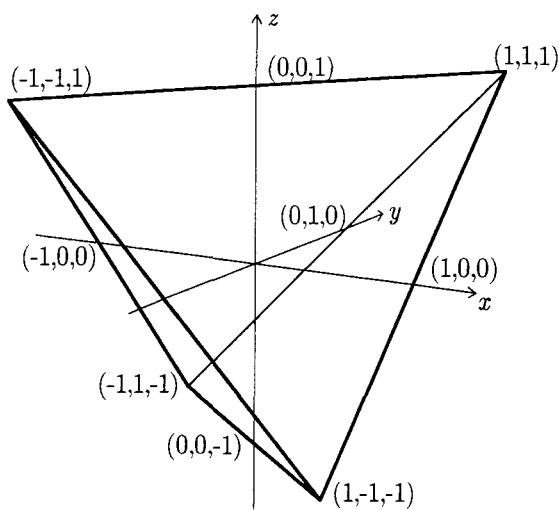
Von **G.J. Rieger***, Hannover

(Eingegangen am 28. 10. 1997)

Es bezeichne \mathbb{R}^3 den 3-dimensionalen euklidischen Raum mit Koordinaten x, y, z . Unter dem regelmäßigen Tetraeder T verstehen wir die konvexe Hülle der 4 Punkte

$$(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1).$$

Diese Punkte sind die Ecken von T . T hat 6 Kanten und zwar der Länge $\sqrt{8}$. T hat 4 gleichkante Dreiecke als Seiten. $U := (0, 0, 0)$ ist der Schwerpunkt von T (Figur 1).



Figur 1:
Tetraeder im Raum

Es sei E eine Ebene durch U und $\vec{n}(E)$ ein in U angehefteter Normaleneinheitsvektor von E . Es sei \vec{n} ein in U angehefteter Einheitsvektor und $E(\vec{n})$ die zu \vec{n} senkrechte Ebene durch U . Dann ist $E(\vec{n}(E)) = E$, $\vec{n}(E(\vec{n})) = \pm \vec{n}$. Es bezeichne μ den ebenen Flächeninhalt. $E \cap T$ ist ein konvexes Polygon; $\mu(E \cap T)$ heißt ein Quermaß von T ;

$$(1) \quad Q := \bigcup_E \mu(E \cap T) (\vec{n}(E) \cup (-\vec{n}(E))) = \bigcup_{\vec{n}} \mu(E(\vec{n}) \cap T) \vec{n}$$

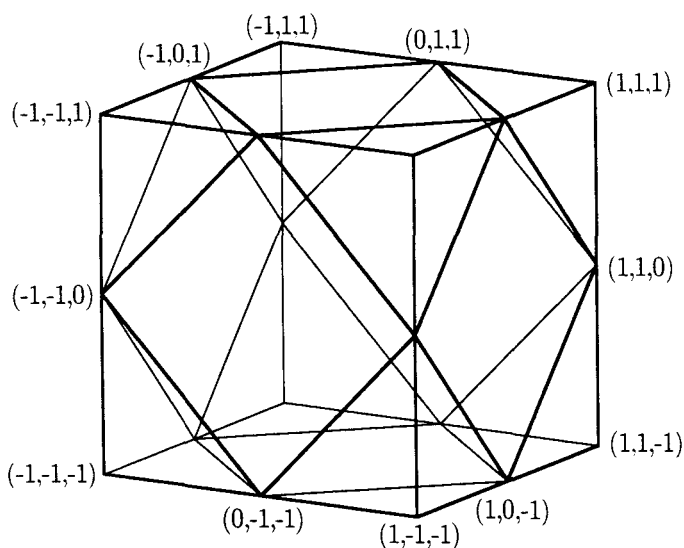
heißt Quermaßkörper von T . (Dazu vergleiche man auch [1], 45–46.) In dieser Arbeit soll Q genau bestimmt werden.

* Prof. Dr. G.J. Rieger · Institut für Mathematik der Universität Hannover
Welfengarten 1 · 30167 Hannover

§ 1

Unter dem Würfel W verstehen wir die konvexe Hülle der 8 Punkte $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Durch jeden Randpunkt von W geht genau ein Strahl aus U ; dieser enthält einen Richtungsvektor \vec{n} ; auf diesen Strahlen tragen wir von U aus die Strecke $\mu(E(\vec{n}) \cap T)$ ab. So wird der Rand von W durch Zentralprojektion aus U in den Rand von Q übergeführt.

Für jede Ecke C von T betrachten wir die zur Strecke \overline{UC} senkrechte Ebene durch U ; den Durchschnitt dieser Ebenen mit dem Rand von W nennen wir das Netz auf W . Durch Wegnahme des Netzes auf W vom Rand von W entstehen Zusammenhangskomponenten, deren topologischen Abschluß wir Felder auf W nennen. In (1) wird es von Wichtigkeit sein, welches Feld auf W von der Verlängerung von $\vec{n}(E)$ getroffen wird; danach richten sich die Ecken des Polygons $E \cap T$. Für jede Kante von T betrachten wir noch die zusammen mit U aufgespannte Ebene; die darauf senkrechte Gerade durch U trifft den Rand von W in genau 2 Punkten des Netzes von W ; das ergibt die 12 Kantenmitten von W (Figur 2).



Figur 2:
Würfel mit Netz

Für reelle a, b bezeichne $E(a, b)$ die Ebene

$$ax + by + z = 0;$$

der Vektor $\langle a, b, 1 \rangle$ ist senkrecht auf $E(a, b)$; man hat etwa

$$\vec{n}(E(a, b)) = (a^2 + b^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \langle a, b, 1 \rangle.$$

Es bezeichne p die senkrechte Projektion von \mathbb{R}^3 auf die Ebene $z = 0$; für $p(x, y, z) := (x, y, 0)$ schreiben wir auch (x, y) . Mit

$$(2) \quad F(a, b) := \mu(p(E(a, b) \cap T)), \quad q(a, b) := \mu(E(a, b) \cap T)$$

gilt

$$(3) \quad q(a, b) = F(a, b) (a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \\ F(a, b) \langle a, b, 1 \rangle = q(a, b) \vec{n}(E(a, b));$$

der Punkt

$$(x, y, z) = F(a, b) \langle a, b, 1 \rangle$$

liegt daher auf dem Rand von Q und erfüllt

$$(4) \quad z = F(a, b), \quad x = az, \quad y = bz,$$

und

$$(5) \quad z = F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right);$$

(4) bzw. (5) ist also eine Parameterdarstellung bzw. geschlossene Darstellung des in $z > 0$ gelegenen Teils des Randes von Q ; den Teil mit $z = 0$ bzw. $z < 0$ ergänzt man sofort durch Stetigkeit bzw. Spiegelung an $z = 0$.

Bemerkung 1. Das Dreieck \triangle habe die Ecken $(0, 0, z_0)$, (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) ; dann ist

$$\mu(p\triangle) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Beispiel 1. Ließen wir statt T auch das Ellipsoid L mit den Halbachsen r, s, t um U zu, so wäre der Quermaßkörper das Ellipsoid mit den Halbachsen $\pi st, \pi tr, \pi rs$ um U . Denn: $p(E(a, b) \cap L)$ ist die Ellipse

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{s}\right)^2 + \left(\frac{ax + by}{t}\right)^2 = 1;$$

eine Ellipse $c_1 x^2 + 2c_2 xy + c_3 y^2 = 1$ erfüllt $c_1 c_3 > c_2^2$ und hat den Flächeninhalt $\pi(c_1 c_3 - c_2^2)^{-\frac{1}{2}}$; hier ist

$$c_1 = \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{t^2}, \quad c_2 = \frac{ab}{t^2}, \quad c_3 = \frac{1}{s^2} + \frac{b^2}{t^2};$$

es folgt

$$F^2(a, b) = \frac{\pi^2}{\frac{a^2}{s^2 t^2} + \frac{b^2}{t^2 r^2} + \frac{1}{r^2 s^2}}$$

und wegen (5) schließlich

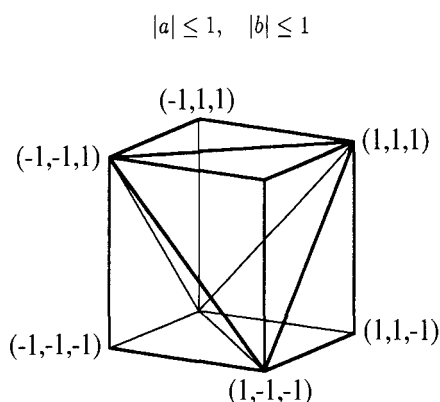
$$\left(\frac{x}{\pi st}\right)^2 + \left(\frac{y}{\pi tr}\right)^2 + \left(\frac{z}{\pi rs}\right)^2 = 1.$$

§ 2

Es ist $T \subseteq W$; jede Kante von T ist dabei Diagonale von genau einer Seite von W (Figur 3). Aus Symmetriegründen bei T können wir uns zur Bestimmung von Q auf Randpunkte $(a, b, 1)$ von W mit

$$(6) \quad |a| \leq 1, \quad |b| \leq 1$$

beschränken.



Figur 3:
Tetraeder in Würfel

$E(a, b)$ trifft die Kanten von T oder ihre Verlängerungen in den eigentlichen oder un-eigentlichen Punkten

$$\begin{aligned} X_+ &= \left(1, \frac{-a}{1+b}, \frac{-a}{1+b}\right), & X_- &= \left(\frac{-a}{1-b}, \frac{a}{1-b}\right), \\ Y_+ &= \left(\frac{-b}{1+a}, 1, \frac{-b}{1+a}\right), & Y_- &= \left(\frac{-b}{1-a}, -1, \frac{b}{1-a}\right), \\ Z_+ &= \left(\frac{-1}{a+b}, \frac{-1}{a+b}, 1\right), & Z_- &= \left(\frac{1}{a-b}, \frac{-1}{a-b}, -1\right). \end{aligned}$$

Im Teilquadrat $|a| + |b| \leq 1$ von (6) ist $E(a, b) \cap T$ gleich dem Viereck $X_+ Y_+ X_- Y_-$; (2) und Bemerkung 1 geben sofort

$$(7) \quad F(a, b) = 2 \frac{1 - a^2 - b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} \quad (|a| + |b| \leq 1, \quad |a| \neq 1, \quad |b| \neq 1),$$

$$F(\pm 1, 0) = F(0, \pm 1) = 2.$$

Für (a, b) aus den 4 Restdreiecken von (6) mit $|a| + |b| \geq 1$ ist $E(a, b) \cap T$ gleich einem Dreieck; etwa für (a, b) aus dem Restdreieck

$$(8) \quad a \leq 1, \quad b \leq 1, \quad a + b \geq 1$$

ist $E(a, b) \cap T$ gleich dem Dreieck $X_+ Y_+ Z_+$; im Grenzfall $a + b = 1$ ist $X_- = Y_- = Z_+ = (-1, -1, 1)$, und das Dreieck $X_+ Y_+ Z_+$ kann als das ausgeartete Viereck $X_+ Y_+ X_- Y_-$ aufgefaßt werden; (2) und Bemerkung 1 geben sofort

$$(9) \quad F(a, b) = \frac{(1 + a + b)^2}{(1 + a)(a + b)(1 + b)} \quad ((8));$$

man kann nun die anderen 3 Restdreiecke entweder analog wie (8) behandeln oder durch Symmetrieüberlegungen an $T \subseteq W$ auf (9) zurückgreifen; so findet man

$$(10) \quad F(a, b) = \frac{(1 + |a| + |b|)^2}{(1 + |a|)(|a| + |b|)(1 + |b|)} \quad ((6), |a| + |b| \geq 1).$$

Mittels (5) folgt aus (7) im Kegel

$$(11) \quad |x| + |y| \leq z$$

sofort

$$(12) \quad z(2 - z)(z^2 - x^2 - y^2) = x^2 y^2.$$

Mittels (5) folgt aus (9) oder aus (10) im Kegel

$$(13) \quad x \leq z, y \leq z, x + y \geq z$$

sofort

$$(14) \quad (x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)^2;$$

$(2, 0, 2)$ wie auch $\left(\frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$ erfüllt (13) und (14); mit

$$R := (x^2 - y^2)^2 + 4xy(x + y)$$

ist folglich

$$(15) \quad z = \frac{1}{2(x + y - 1)}((x + y)(2 - x - y) + \sqrt{R}).$$

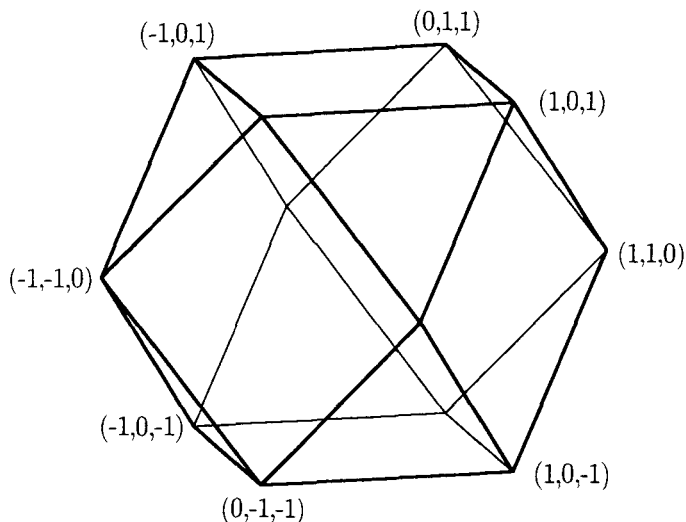
Wir können uns jetzt leicht eine vollständige Veranschaulichung von Q verschaffen.

§ 3

Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$; unter dem Kuboktaeder $V^{(r)}$ verstehen wir die konvexe Hülle der 12 Punkte

$$(0, \pm r, \pm r), (\pm r, 0, \pm r), (\pm r, \pm r, 0).$$

Diese Punkte sind die Ecken von $V^{(r)}$. $V^{(r)}$ hat 24 Kanten und zwar der Länge $r\sqrt{2}$. Der Rand von $V^{(r)}$ besteht aus 6 Quadraten und 8 gleichkantigen Dreiecken (Figur 4).



Figur 4:
Kuboktaeder $V^{(1)}$

Figur 2 kann auch gedeutet werden als Kuboktaeder in Würfel. Eine Menge aus \mathbb{R}^3 heißt sternförmig, wenn und nur wenn sie U als inneren Punkt enthält und jeder Strahl aus U ihren Rand in genau einem Punkt trifft. (1) ist nach Konstruktion sternförmig.

Die Mengen M_1 und M_2 aus \mathbb{R}^3 seien sternförmig. Es sei S_1 bzw. S_2 eine Teilmenge des Randes von M_1 bzw. M_2 ; S_1 liegt nach Definition radial zu S_2 , wenn und nur wenn S_1 und S_2 durch Strahlen aus U (Zentralprojektion) ineinander übergeführt werden können; ist für übergeführte Punkte $P_1 \in S_1$ und $P_2 \in S_2$ dabei stets P_1 ein Punkt der Strecke $\overline{UP_2}$, so sagen wir, S_1 liege unter S_2 oder, was dasselbe ist, S_2 liege über S_1 .

Vom Rand von $V^{(2)}$ liegt genau die quadratische Seite mit den Ecken $(\pm 2, 0, 2)$, $(0, \pm 2, 2)$ im Kegel (11). Derjenige Teil des Randes von Q , der radial zu dieser in der Ebene $z = 2$ enthaltenen Seite von $V^{(2)}$ liegt, erfüllt (12) und hat die Symmetrien des Quadrates; dieser Teil liegt sogar radial unter dieser Seite und hat mit dieser genau ihre Diagonalen als Durchschnitt. Folglich ist Q schon bei $(0, 0, 2)$ nicht konvex.

Jetzt wird symmetrisch ergänzt. So muß man im Fall der in der Ebene $z = -2$ enthaltenen quadratischen Seite von $V^{(2)}$ in (12) nur z durch $-z$ ersetzen. Im Fall der in der Ebene $x = 2$ enthaltenen Seite von $V^{(2)}$ übernimmt in (12) nur x die Rolle von z . So geht es weiter für die restlichen 3 quadratischen Seiten von $V^{(2)}$. Radial unter allen 6 quadra-

tischen Seiten von $V^{(2)}$ liegen also kongruente analytische Flächenstücke des Randes von Q .

Verträglich mit (11) setzen wir $z = x + y$; aus (12) entnimmt man dann, daß radial unter der Kante von $V^{(2)}$ mit den Endpunkten $(0, 2, 2)$, $(2, 0, 2)$ und dem Mittelpunkt $(1, 1, 2)$ eine Kurve und zwar ein Hyperbelbogen des Randes von Q liegt mit den Endpunkten $(0, 2, 2)$, $(2, 0, 2)$ und dem Mittelpunkt $\left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{16}{9}\right)$; denn: die Anwendung von p auf diese in der Ebene $z = x + y$ enthaltenen Kurve führt zu der Hyperbelgleichung

$$(16) \quad (2x + y)(x + 2y) = 4(x + y).$$

Unter den anderen 23 Kanten von $V^{(2)}$ liegen kongruente Hyperbelbögen des Randes von Q . Aus Symmetriegründen bei T bleibt (14) richtig, wenn man in (13) die Koordinaten zyklisch vertauscht; statt (13) erhalten wir dann durch Vereinigung den Kegel

$$(17) \quad x \leq y + z, \quad y \leq z + x, \quad z \leq x + y$$

als Gültigkeitsbereich für (14). Vom Rand von $V^{(2)}$ liegt genau die dreieckige Seite mit den Ecken $(0, 2, 2)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$ im Kegel (17). Derjenige Teil B des Randes von Q , der radial zu dieser in der Ebene $x + y + z = 4$ enthaltenen Seite von $V^{(2)}$ liegt, erfüllt (14) und hat die Symmetrien des gleichkantigen Dreiecks; da man für (17) aus (14) leicht $x + y + z \leq 4$ folgert (siehe Anhang 1), hat man statt „radial zu“ genauer „radial unter“; so liegt beispielsweise der Punkt $\left(\frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$ des Randes von Q radial unter dem Mittelpunkt $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ der erwähnten dreieckigen Seite von $V^{(2)}$.

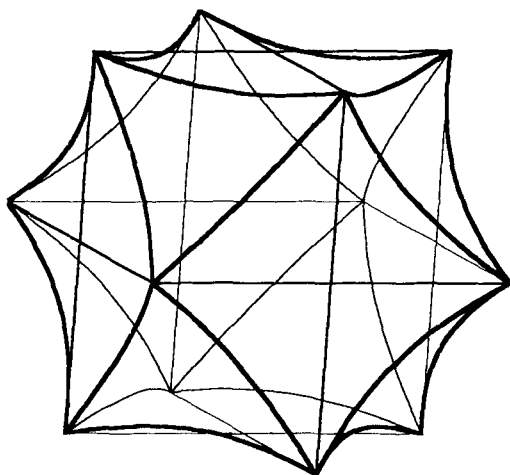
Aus Symmetriegründen bei $T \subseteq W$ liegen radial unter allen 8 dreieckigen Seiten von $V^{(2)}$ kongruente analytische Flächenstücke des Randes von Q , die durch die erwähnten Hyperbelbögen begrenzt werden. Diese Flächenstücke sind konkav (Anhang 2).

Während die Seiten von $V^{(2)}$ sich entlang der Kanten stetig aneinanderschließen, schließen sich die unter diesen Seiten liegenden analytischen Flächenstücke des Randes von Q entlang der unter den Kanten von $V^{(2)}$ liegenden Hyperbelbögen stetig differenzierbar (aber nicht 2-mal differenzierbar) aneinander; man kann das anhand von (3), (7), (9) leicht nachrechnen oder eleganter beweisen durch Anpassung der Herleitung von (5). In jeder kleinen Umgebung jeder Ecke von $V^{(2)}$ sieht Q näherungsweise aus wie ein Kegel mit stetig differenzierbarer Erzeugniskurve (siehe Anhang 3); diese kann man sich so entstanden denken, daß man bei einer Ellipse die beiden Endpunkte des längeren Durchmessers durch zum kürzeren Durchmesser parallele Strecken der Länge des kürzeren Durchmessers ersetzt; die Ellipsenbögen entsprechen den quadratischen Seiten von $V^{(2)}$ (Figur 7).

Man kann sich nun wie folgt Q aus $V^{(2)}$ global entstanden denken. Wir halten die Ecken von $V^{(2)}$ fest und verformen radial in Richtung auf U die Kanten von $V^{(2)}$ zu kongruenten, schwach gekrümmten Hyperbelbögen; diese sind nur noch „scheinbare Kanten“ von Q , da die analytischen Flächenstücke des Randes von Q dort stetig diffe-

renzierbar aneinander stoßen. Die Ecken von $V^{(2)}$ sind bezüglich $V^{(2)}$ die Spitzen kleiner Viereckspyramiden und bezüglich Q die Spitzen kleiner Kegel. Es ist $Q \subseteq V^{(2)}$. Der Rand von Q hat mit dem Rand von $V^{(2)}$ genau die Diagonalen der quadratischen Seiten von $V^{(2)}$ gemeinsam; Q und $V^{(2)}$ haben dieselbe Umkugel. Es ist $V^{(2)} \subseteq Q$, und die Ränder dieser beiden Mengen haben genau die 8 Punkte $\left(\pm \frac{9}{8}, \pm \frac{9}{8}, \pm \frac{9}{8}\right)$ gemeinsam (Anhang 4). Beliebige Punkte des Randes von Q , soweit sie radial zu einer dreieckigen Seite von $V^{(2)}$ liegen, sind also von U mindestens so weit entfernt wie die erwähnten 8 Punkte. Die Punkte des Randes von Q , soweit sie radial zu einer quadratischen Seite von $V^{(2)}$ liegen, haben einen Abstand ≥ 2 von U (Anhang 5). Wegen $3 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 < 2^2$ haben also der Rand von Q und der Rand der Inkugel von Q genau auch die erwähnten 8 Punkte gemeinsam.

Q hat die Symmetrien des Kuboktaeders. Ganz grob gesprochen ist Q ein „eingedrücktes, kantenloses Kuboktaeder“ (Figur 5).



Figur 5

Anhang 1. Wir benutzen (4) und (9). Es ist dann hinreichend, unter Voraussetzung von (8) zu zeigen

$$(1 + a + b)^3 \leq 4 (1 + a) (a + b) (1 + b) ;$$

das formen wir um zu

$$(a + b)^2 - 1 + (a + b) (1 - (a - b)^2) \geq 0 ,$$

was zutrifft. Gleichheit tritt ein genau für $a = 1, b = 0$ und $a = 0, b = 1$.

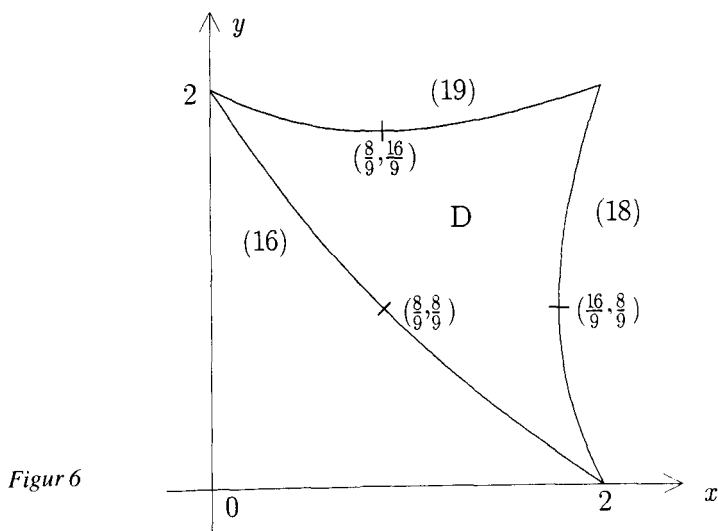
Anhang 2. Mittels $z = x + y$ in (14) statt wie oben in (12) und anschließend mittels p gelangt man auch zu (16); mittels $x = y + z$ bzw. $y = z + x$ in (14) gelangt man entsprechend auf Q zu dem Hyperbelbogen von $(2, 0, 2)$ nach $(2, 2, 0)$ bzw. von $(2, 2, 0)$ nach $(0, 2, 2)$; die Anwendung von p führt zu der Hyperbelgleichung

$$(18) \quad (x + y)(2x - y) = 4x$$

bzw.

$$(19) \quad (x + y)(2y - x) = 4y.$$

Der Definitionsbereich der Funktion (15) ist daher ein durch 3 Hyperbelbögen berandetes Dreieck D (Figur 6). B ist also der Graph von (15) über D . Die Punkte (x, y) von D erfüllen



$$x + y \geq \frac{16}{9}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Man findet

$$(20) \quad \begin{aligned} & (x + y - 1)^3 R^{\frac{3}{2}} z_{xx} = \\ & = y^4 K_0 + 6xy^4 K_1 + 3x^2 y^3 K_2 + 4x^3 y^2 K_3 + 3x^4 y K_4 + 6x^5 y^2 + x^6 + R^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 K_0 &:= -2 + 6y - 5y^2 + 2y^3 = (2y - 1)(1 + (1 - y)^2), \\
 K_1 &:= 2 - 2y + y^2 = 1 + (y - 1)^2, \\
 (21) \quad K_2 &:= 8 - 9y + 4y^2 = \frac{47}{16} + \left(\frac{9}{4} - 2y\right)^2, \\
 K_3 &:= 6 - 10y + 5y^2 = 1 + 5(y - 1)^2, \\
 K_4 &:= 2 - 7y + 6y^2 = (2 - 3y)(1 - 2y) = -\frac{1}{24} + \frac{1}{6}\left(6y - \frac{7}{2}\right)^2.
 \end{aligned}$$

Für $y \geq \frac{2}{3}$ ist die rechte Seite von (20) termweise ≥ 0 und insgesamt > 0 . Für $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{3}$ kann in (21) nur $K_4 < 0$ werden; hier ist $x > \frac{8}{9}$ (Figur 6); für die rechte Seite von (20) gilt dann

$$> x^6 + 3x^4yK_4 \geq x^6 - 3x^4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{24} = x^4 \left(x^2 - \frac{1}{12}\right) > 0.$$

Für $y \leq \frac{1}{2}$ kann in (21) nur $K_0 < 0$ werden; wieder ist $x > \frac{8}{9}$; für die rechte Seite von (20) gilt dann

$$> x^6 + y^4K_0 > \left(\frac{8}{9}\right)^6 - \frac{1}{16} \cdot 2 > 0.$$

Also ist

$$(22) \quad z_{xx} > 0 \quad ((x, y) \in D).$$

Man findet

$$(23) \quad \frac{1}{2}(x+y-1)^3 R^{\frac{3}{2}}(x+y)^{-1}(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = \alpha - \beta + \gamma + (x+y)^3 R^{\frac{1}{2}}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= (x+y)(x^4 + 2x^3y + 6x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) \geq (x+y)^3(x^2 + y^2) \geq 2(x+y)^3xy, \\
 \beta &:= 2x^2y^2(x+y)^2, \\
 \gamma &:= 2xy(x^2 + xy + y^2) \geq xy(x+y)^2.
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\alpha - \beta + \gamma}{2xy(x+y)^2} \geq x + y - xy + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - (1-x)(1-y) \geq \frac{1}{2}.$$

Mit (23) folgt

$$(24) \quad z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 > 0 \quad ((x, y) \in D).$$

Wegen (22), (24) ist B konkav.

Anhang 3. Wir betrachten die Ecke $(2, 0, 2)$. Durch Drehung in \mathbb{R}^3 um die y -Achse führen wir anstelle x, z die neuen Koordinaten u, v ein gemäß $x\sqrt{2} = v - u$, $z\sqrt{2} = v + u$. Diese Ecke hat jetzt die Koordinaten $u = 0$, $y = 0$, $v = 2\sqrt{2}$. Für kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Ebene $v = 2(1 - \varepsilon)\sqrt{2}$. Mit $w := \frac{u}{\sqrt{2}}$ folgt $x = 2 - 2\varepsilon - w$, $z = 2 - 2\varepsilon + w$. Einsetzen in (12) ergibt

$$(2 + w - 2\varepsilon)(2\varepsilon - w)(8w - 8\varepsilon w - y^2) = (2 - 2\varepsilon - w)^2 y^2;$$

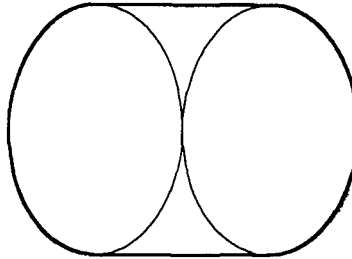
angenähert ist das die Ellipse

$$\left(\frac{u - \varepsilon\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{2\varepsilon} \right)^2 = 1.$$

Einsetzen in (14) ergibt

$$4(2 - 2\varepsilon - w + y)(2 - 2\varepsilon + w + y)(1 - \varepsilon) = (4 + y - 4\varepsilon)^2;$$

angenähert ist das die Gerade $y = 2\varepsilon$ (Figur 7).



Figur 7

Anhang 4. An Hand von W kann man sich auf die Fälle $0 \leq b \leq a$, $a + b \leq 1$ mit $F(a, b)$ aus (7) und $a \leq 1$, $b \leq a$, $a + b \geq 1$ mit $F(a, b)$ aus (9) beschränken. Erster Fall: Es ist zu zeigen $F(a, b) \geq \frac{27}{16}$; wir zeigen sogar $F(a, b) \geq F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{16}{9}$ oder, was dasselbe ist,

$$\frac{a^2 b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} \leq \frac{1}{9};$$

aber die linke Seite davon nimmt mit a und mit b zu, und man kann sich daher auf $a + b = 1$ beschränken; mit $b = 1 - a$ wird man dann genau auf $0 \leq (1 - 2a)^2$ geführt. Zweiter Fall: Gegenüber Anhang 1 ist jetzt zu zeigen

$$8(1 + a + b)^3 \geq 27(1 + a)(a + b)(1 + b);$$

mit den neuen Koordinaten u, v gemäß

$$a = 1 - u + v, \quad b = 1 - u - v$$

ist für $0 \leq v \leq u \leq \frac{1}{2}$ dann zu zeigen

$$9(u^2 + 3v^2) \geq u(5u^2 + 27v^2);$$

das ist aber auch noch richtig, wenn man den Faktor u zu 1 vergrößert; Gleichheit tritt genau ein für $u = v = 0$ oder $a = b = 1$.

Anhang 5. Wir parametrisieren a, b mittels s, t gemäß $a = s(1+t)$, $b = s(1-t)$; für $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, $-1 \leq t \leq 1$ erhalten wir genau $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b \leq 1$; mit (7) folgt

$$F(a, b) = 2 \frac{1 - 2s^2 - 2s^2 t^2}{(1 - s^2)^2 - 2s^2(1 + s^2)t^2 + s^4 t^4};$$

bei festem s ist die rechte Seite am kleinsten für $t = 0$, wie man sofort nachrechnet; auch $1 + a^2 + b^2 = 1 + 2s^2(1 + t^2)$ ist bei festem s am kleinsten für $t = 0$ oder, was dasselbe ist, für $a = b$. Für den Nachweis von $(1 + a^2 + b^2) F^2(a, b) \geq 4$ ist also der Nachweis von $(1 + 2a^2) F^2(a, a) \geq 4$ hinreichend. Diese Ungleichung rechnet man sofort nach.

Herr Dr. Viergutz hat freundlicherweise (20), (23) für mich maschinell erstellt und auch die Zeichnungen angefertigt; (20) habe ich von Hand geprüft. Herr Dr. Georg Rieger jr. hat dankenswerterweise ein Drahtmodell zu Figur 5 angefertigt.

Die Quermaßkörper der anderen 4 platonischen Körper werden später behandelt.

Literatur

- [1] T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*; Chelsea Publ. Comp. New York, N.Y., 1948.